

Quantification en commande

Florent Koudohode

30 janvier 2026

Table des matières

1	Quantification pour une EDP de transport	2
2	Problème étudié : EDP hyperbolique scalaire en strict-feedback	3
2.1	Le modèle	3
2.2	Norme choisie	4
3	Ingrédient 1 : backstepping (cas sans quantification)	4
3.1	Transformation backstepping	4
3.2	Système cible et bornes de normes	4
3.3	Contrôleur nominal (non quantifié)	5
4	Ingrédient 2 : quantification dynamique et loi hybride	6
4.1	Le quantificateur “presque” classique	6
4.2	Loi de commande sous quantification des mesures	6
4.3	Détection de la fin de la phase de zoom	7
4.4	Mise à jour de $\mu(t)$	7
5	Analyse de stabilité : quantification des mesures	7
5.1	Énoncé du résultat principal	7
5.2	Étape 1 : analyse “zoomer”	8
5.3	Étape 2 : dézoomer et décroissance géométrique	8
5.4	Assemblage : logique complète du Théorème 1	8
6	Extension : quantification de l’entrée (Théorème 2)	9
6.1	Loi de commande	9
6.2	Théorème 2 (forme compacte)	9
7	Simulation : message de l’exemple numérique	9
8	Résumé opérationnel (réutilisation)	9
9	Compensation simultanée du retard d’entrée et de la quantification [1]	11
10	Objectifs et feuille de route	11
11	Modélisation : retard d’entrée comme EDP de transport	12
11.1	Système avec retard	12
11.2	Espace d’état, normes, régularité	13

12	Commande nominale : loi de prédiction (sans quantification)	13
12.1	Idée du prédicteur	13
12.2	Loi nominale	13
13	Backstepping : système cible et équivalence de normes	14
13.1	Pourquoi introduire w ?	14
13.2	Transformation et système cible	14
14	Quantification dynamique et loi de commande commutée	14
14.1	Quantificateur dynamique	14
14.2	Loi predictor-feedback avec mesures (presque) quantifiées	15
14.3	Stratégie de commutation pour $\mu(t)$	15
15	Stabilité sous quantification d'état : résultat principal	16
15.1	Plan de preuve	16
16	Phase 1 : zoomer et détection d'entrée en portée	17
16.1	Boucle ouverte et bornes explicites	17
16.2	Pourquoi l'évènement est détectable ?	18
17	Phase 2 : ISS et petit gain sur le système cible (Lemme 2)	20
17.1	Réécriture du système cible comme interconnexion ISS	20
17.2	Deux briques ISS	20
17.3	Normes pondérées et fermeture petit gain	21
18	Extension : quantification de l'entrée (au lieu des mesures d'état)	26
18.1	Cas : U quantifié, mesures (X, u) non quantifiées	26
18.2	Évènement et commutation	26
18.3	Résultat	26
19	Commentaires pratiques : comment dimensionner et interpréter les constantes	27
19.1	Ce que la condition Δ/M dit vraiment	27
19.2	Pourquoi un <i>switched</i> predictor-feedback ?	27
19.3	Lien avec des cascades EDO–EDP plus générales	27
20	Mini-annexe : schémas et check-list de reproduction	28
20.1	Schéma de bloc (texte)	28
21	Code pour les simus	28
21.1	Check-list (si vous voulez appliquer à un autre système)	28

1 Quantification pour une EDP de transport

Référence et objectif

Ces notes présentent, sous forme de cours, l'article [1] [10.1016/j.sysconle.2020.104809](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104809).

L'objectif est double :

- comprendre la stabilisation par *backstepping* d'une EDP hyperbolique scalaire ;
- comprendre comment compenser la *quantification* (mesures ou entrée) via une loi *hybride* dynamique.

Tout au long du texte, lorsque des notions (backstepping, quantification, équations à retard intégral, etc.) deviennent indispensables, elles sont résumées dans des encadrés destinés à un

Méthode (résumé) : stabilisation sous quantification via un quantificateur dynamique

Idée générale. La quantification introduit une erreur $e_q := u_q - u$ (contrôle quantifié moins contrôle nominal). On stabilise en deux phases en pilotant un *paramètre de zoom* $\mu(t)$: d'abord *éviter la saturation* (zoomer), puis *réduire l'erreur* (dézoomer).

$\|\cdot\|$ est la norme dans l'espace d'état

Phase 1 (boucle ouverte / mise à l'échelle). On impose $U(t) = 0$ et on établit une borne a priori (solution explicite/estimations) :

$$\|x(t)\| \leq C(t) \|x(0)\| \quad (0 \leq t \leq t_1^*).$$

On choisit $\mu(t)$ (souvent par paliers croissants) de sorte qu'à un premier instant t_1^* l'état soit *dans la plage du quantificateur (pas de saturation)*, typiquement $\left\| \frac{x(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\| \leq M\overline{M}$, (avec $\overline{M} < 1$, un paramètre d'ajustement). On trouve que $t_1^* \leq C^{-1} \left(\frac{\|x_0\|}{\mu_0(M\overline{M}-2\Delta)} \right)$

Phase 2 (boucle fermée quantifiée). On réécrit le système bouclé fermé (avec le contrôle) comme le système nominal avec la perturbation liée à l'erreur e_q . On peut établir une estimation exponentielle ISS de type :

$$\|x(t)\| \leq c e^{-\delta(t-t_1^*)} \|x(t_1^*)\| + \gamma \sup_{t_1^* \leq s \leq t} \|e_q(s)\|.$$

Ensuite on établit que

$$\|e_q(t)\| \leq \frac{1}{1+\lambda} \|x(t)\| \quad (\lambda > 0, \text{ on peut utiliser une constante } < 1)$$

pourvu que

$$\Omega \overline{M} M \mu \leq \|x(t)\| \leq M \mu.$$

En fait, avec le quantificateur dynamique, on montre (dans la région non saturée)

$$\|e_q(t)\| \leq M_3 \mu \|q(\frac{x}{\mu}) - \frac{x}{\mu}\| \leq M_3 \Delta \mu(t).$$

On met alors à jour $\mu(t)$ (par période/paliers/événements, p.ex. $\mu_{k+1} = \Omega \mu_k$ avec $0 < \Omega < 1$) pour maintenir la non-saturation et faire décroître $\Delta \mu(t)$, ce qui entraîne la stabilisation.

2 Problème étudié : EDP hyperbolique scalaire en strict-feedback

2.1 Le modèle

On considère, pour $x \in [0, D]$ ($D > 0$) et $t \geq 0$, l'EDP linéaire scalaire

$$u_t(x, t) = u_x(x, t) + g(x) u(0, t) + \int_0^x \bar{g}(x, y) u(y, t) dy, \quad (1)$$

$$u(D, t) = U(t), \quad (2)$$

où $u(\cdot, t)$ est l'état, $U(t)$ est l'entrée (actionnement à la frontière), et $g(\cdot)$, $\bar{g}(\cdot, \cdot)$ sont continues.

Pourquoi “strict-feedback” ? (intuition)

Le terme $g(x)u(0,t)$ et l’intégrale $\int_0^x \bar{g}(x,y)u(y,t) dy$ créent une *dépendance cascade* vers la frontière $x = 0$: le champ “voit” une combinaison de valeurs le long de $[0,x]$. Ce type de structure est l’analogue EDP de systèmes ODE en strict-feedback et peut se traiter naturellement par backstepping.

2.2 Norme choisie

On travaille principalement avec la norme sup :

$$\|u(t)\|_\infty := \sup_{x \in [0,D]} |u(x,t)|.$$

C’est un choix stratégique : la quantification est, par nature, une contrainte de *magnitude*, et les bornes “ $|q(\cdot) - (\cdot)| \leq \Delta$ ” se traduisent proprement en norme L^∞ .

Pourquoi pas L^2 ?

En L^2 , relier directement la taille de u à celle de sa version quantifiée $q(u/\mu)$ exige souvent de contrôler des dérivées spatiales (ou d’utiliser des inégalités plus lourdes). Ici, l’analyse vise des estimations explicites et “robustes” vis-à-vis du quantificateur ; la norme $\|\cdot\|_\infty$ est l’outil naturel.

3 Ingrédient 1 : backstepping (cas sans quantification)

3.1 Transformation backstepping

Le point de départ est un changement de variable de type Volterra :

$$w(x,t) = u(x,t) - \int_0^x k(x,y) u(y,t) dy, \quad (3)$$

$$u(x,t) = w(x,t) + \int_0^x \ell(x,y) w(y,t) dy. \quad (4)$$

Les noyaux k et ℓ (continûment différentiables) sont choisis pour transformer (1)–(2) en une dynamique cible simple.

Backstepping en une phrase

On construit une transformation intégrale triangulaire (type Volterra), **continue bijective, d’inverse continue, qui “absorbe” les couplages instables du modèle original**, afin d’obtenir une EDP cible beaucoup plus simple, sur laquelle on sait stabiliser à la frontière.

3.2 Système cible et bornes de normes

Sous (3)–(4), on obtient l’EDP cible

$$w_t(x,t) = w_x(x,t), \quad (5)$$

$$w(D,t) = U(t) - \int_0^D k(D,x) \left(w(x,t) + \int_0^x \ell(x,y) w(y,t) dy \right) dx. \quad (6)$$

De plus, u et w sont équivalents en norme L^∞ :

$$M_2 \|u\|_\infty \leq \|w\|_\infty \leq M_1 \|u\|_\infty, \quad (7)$$

avec

$$M_1 = 1 + D \max_{0 \leq x \leq D} \max_{0 \leq y \leq x} |k(x, y)|, \quad (8)$$

$$M_2 = \frac{1}{1 + D \max_{0 \leq x \leq D} \max_{0 \leq y \leq x} |\ell(x, y)|}. \quad (9)$$

Interprétation de M_1, M_2

Les noyaux k et ℓ sont des “filtres” intégrateurs. Les constantes M_1 et M_2 quantifient le *gain* entre u et w en norme sup. Elles apparaissent systématiquement :

- dans les conditions de quantification admissible ;
- dans les constantes d’overshoot des estimations de stabilité ;
- dans les règles d’ajustement du paramètre de zoom $\mu(t)$.

3.3 Contrôleur nominal (non quantifié)

Si l’état $u(x, t)$ est disponible, on peut annuler la condition de bord (6) en choisissant le *contrôleur nominal backstepping*

$$U_{\text{nom}}(t) = \int_0^D k(D, x) u(x, t) dx. \quad (10)$$

Dans ce cas, on obtient simplement

$$w_t = w_x, \quad w(D, t) = 0,$$

et la solution s’éteint en *temps fini* ($t \geq D$) pour le système cible (transport pur).

Pourquoi le temps fini n'est-il plus vrai sous quantification ?

Une mesure quantifiée introduit un *biais* (erreur bornée mais non nulle). On ne peut plus imposer exactement $w(D, t) = 0$, seulement “presque partout”. Il faut donc :

- assurer que l'erreur de quantification devienne arbitrairement petite à long terme ;
- en pratique : rendre $\mu(t) \rightarrow 0$ (dézoomer), après avoir garanti que l'état est bien *dans la plage* du quantificateur (zoomer).

4 Ingrédient 2 : quantification dynamique et loi hybride

4.1 Le quantificateur “presque” classique

Pour des raisons de caractère bien posé du système, on impose que le quantificateur $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit *localement Lipschitz* et satisfasse deux propriétés typiques :

- **P1 (erreur bornée dans la zone non saturée)** : pour $|z| \leq M$,

$$|q(z) - z| \leq \Delta.$$

- **P2 (saturation)** : lorsque $|z| > M$, $q(z)$ sature (typiquement vers $\pm M$).

Le paramètre M est l'amplitude de saturation, Δ la résolution.

Quantification dynamique : $q_\mu(\cdot)$

On n'applique pas q directement à u , mais à une version *normalisée* :

$$q_\mu(u) := \mu q\left(\frac{u}{\mu}\right),$$

où $\mu > 0$ est une variable de zoom. Intuition :

- si μ est grand : on augmente la *plage* $[-M\mu, M\mu]$ (moins de saturation) ;
- si μ est petit : on réduit la *quantization step* effective (erreur absolue $\approx \mu\Delta$).

Ce mécanisme est standard en quantification dynamic.

4.2 Loi de commande sous quantification des mesures

Lorsque $u(\cdot, t)$ n'est disponible qu'à travers $q_\mu(u(\cdot, t))$, la loi de commande proposée remplace u par sa version quantifiée dans (24) :

$$U(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1^*, \\ \int_0^D k(D, x) q_\mu(u(x, t)) dx, & t > t_1^*, \end{cases} \quad (11)$$

et $\mu(t)$ est mis à jour selon une stratégie hybride à deux phases.

Deux phases : pourquoi ?

Zoomer (phase 1) : on laisse le système en boucle ouverte ($U \equiv 0$) mais on augmente μ jusqu'à être sûr que u est *dans la plage* du quantificateur.

Dézoomer (phase 2) : on active le contrôleur quantifié, et on *diminue* μ périodiquement pour rendre l'erreur absolue de quantification $\mu\Delta$ de plus en plus petite, donc u converge vers 0.

4.3 Détection de la fin de la phase de zoom

Le temps t_1^* est défini comme le *premier instant* où la condition (détectable avec les mesures quantifiées) est satisfaite :

$$|q_\mu(u(x, t_1^*))| \leq \left(\frac{M(1+\lambda)^\nu M_2}{M_1} - \Delta \right) \mu(t_1^*), \quad \forall x \in [0, D], \quad (12)$$

où $0 < \nu < 1$ et $\lambda > 0$ sont des paramètres de réglage.

Que garantit l'événement (12) ?

L'événement (12) est construit pour garantir qu'à $t = t_1^*$ on a, en réalité,

$$|u(x, t_1^*)| \leq \frac{M(1+\lambda)^\nu M_2}{M_1} \mu(t_1^*), \quad \forall x \in [0, D],$$

c'est-à-dire que *l'état n'est pas saturé* et se situe dans une zone où l'erreur de quantification est contrôlable.

4.4 Mise à jour de $\mu(t)$

La mise à jour est constante par morceau. Elle est donnée dans l'article par [1] (Eq. (13), (15)–(18)) :

- **Phase zoomer** : sur des intervalles de longueur τ , μ augmente exponentiellement (en escalier) afin d'assurer la “capture”.
- **Phase dézoomer** : après $t_1^* + T$, on impose des mises à jour périodiques (pas T) :

$$\mu(t_1^* + iT) = \Omega \mu(t_1^* + (i-1)T), \quad i = 2, 3, \dots$$

avec un facteur $\Omega \in (0, 1)$ (donc décroissance géométrique).

Les constantes clefs sont :

$$\bar{M}_1 = \frac{M_3}{DM_2}, \quad M_3 = D \sup_{0 \leq y \leq D} |k(D, y)|, \quad (13)$$

$$\Omega = \frac{(1+\lambda)^{1+\nu} \Delta M_3}{M_2 M}, \quad T = -D \frac{\ln \Omega}{\nu \ln(1+\lambda)}. \quad (14)$$

Condition structurelle : $\Omega < 1$

Pour que μ décroisse en phase 2, il faut $\Omega < 1$, donc en substance “ Δ suffisamment petit devant M ”, modulé par les gains PDE M_2, M_3 et les réglages λ, ν .

5 Analyse de stabilité : quantification des mesures

5.1 Énoncé du résultat principal

Théorème 1 (Stabilité sous quantification des mesures [1]). *Considérons le système (1)–(2) en boucle fermée par (11) et la mise à jour (14) de $\mu(t)$. Si les paramètres du quantificateur satisfont la contrainte*

$$\frac{\Delta}{M} < \frac{M_2}{M_1 (1+\lambda)^\nu \max\{1+\lambda, 2\}}, \quad (15)$$

alors, pour tout $u(\cdot, 0) \in L^\infty([0, D]; \mathbb{R})$, il existe une solution unique globale $u(\cdot, t)$ et

$$\|u(t)\|_\infty \leq \gamma \|u(0)\|_\infty^{2 + \frac{\nu \ln(1+\lambda)}{DM_1}} \exp\left(-\frac{\nu \ln(1+\lambda)}{D} t\right), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

où γ est une constante positive.

Lecture de l'estimation (16)

- Le taux de décroissance exponentielle est *explicite* : $\nu \ln(1 + \lambda)/D$.
- L'overshoot initial dépend de la taille de la condition initiale via une *puissance* $2 + \frac{\nu \ln(1+\lambda)}{DM_1}$.
- Intuition : le temps t_1^* nécessaire à la capture dépend logarithmiquement de $\|u(0)\|_\infty$ (phase zoomer), ce qui produit une puissance dans le majorant final.

5.2 Étape 1 : analyse “zoomer”

Lemme 1. *Sous la contrainte sur les paramètres Δ et M imposée dans l'énoncé du Théorème 1, il existe un instant t_1^* satisfaisant*

$$t_1^* \leq \frac{1}{M_1} \ln \left(\frac{M_1}{\mu_0} \frac{\|u(0)\|_\infty}{M_2 \left(M(1 + \lambda)^\nu \frac{M_2}{M_1} - 2\Delta \right)} \right), \quad (17)$$

tel que la condition d'événement (12) soit satisfaite à l'instant t_1^* . En particulier, on a aussi

$$|u(x, t_1^*)| \leq M(1 + \lambda)^\nu \frac{M_2}{M_1} \mu(t_1^*), \quad \forall x \in [0, D]. \quad (18)$$

Idée de la preuve (avec détails structurants).

1. **Relation PDE $\leftrightarrow$ équation à retard intégral.** Pour l'EDP cible (5), on paramètre la solution par η via $w(x, t) = \eta(t + x - D)$, et on obtient une IDE. [1] (Eq. (22)).
2. **Inégalité de croissance.** On dérive $|\eta(t)| \leq \bar{M}_1 \int_{t-D}^t |\eta(s)| ds$ puis une majoration exponentielle de $\|\eta_t\|$ et $\|w(t)\|_\infty$.
3. **Choix de $\mu(t)$.** Comme μ augmente en escalier, il existe un premier instant t_1^* où l'état est dans une zone non saturée, d'où la validité de (12) puis de (21) dans l'article.

5.3 Étape 2 : dézoomer et décroissance géométrique

Lemme 2 (Bornitude ultime et contraction sur une période [1]). *Supposons $\mu > 0$ constant et que l'état transformé satisfasse l'hypothèse initiale pondérée. Alors, sur $(t_1^*, t_1^* + T)$, la norme pondérée de w est majorée, et à l'instant $t_1^* + T$ on obtient une contraction d'un facteur Ω .*

Structure de preuve.

1. Réécriture IDE : $\eta(t) = f(\eta_t, \mu)$, où f contient l'erreur $q(\cdot) - (\cdot)$.
2. Fonctionnel V_1 (norme pondérée) et estimation discrète en temps court.
3. Utilisation de P1 et de M_3 pour obtenir une contraction de type $|f(\eta, \mu)| \leq \frac{1}{1+\lambda} \|\eta\|$.
4. Choix de T garantissant un facteur Ω sur une période.

5.4 Assemblage : logique complète du Théorème 1

La preuve globale combine :

- (i) capture en temps fini (Lemme 1) ;
- (ii) contraction sur chaque période T (Lemme 2) ;
- (iii) décroissance géométrique de μ par $\Omega \in (0, 1)$;
- (iv) équivalence $u \leftrightarrow w$ via (7).

6 Extension : quantification de l'entrée (Théorème 2)

6.1 Loi de commande

Lorsque l'entrée est quantifiée, le contrôleur devient

$$U(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \bar{t}_1^*, \\ \mu(t) q \left(\frac{1}{\mu(t)} \int_0^D k(D, x) u(x, t) dx \right), & t > \bar{t}_1^*. \end{cases} \quad (19)$$

Le même schéma “zoomer / dézoomer” s'applique, avec une condition suffisante plus favorable.

6.2 Théorème 2 (forme compacte)

Théorème 2 (Stabilité sous quantification de l'entrée [1]). *Si*

$$\frac{\Delta}{M} < \frac{M_2}{M_3(1 + \lambda)^{\nu+1}},$$

alors la solution est globale et satisfait une estimation exponentielle analogue.

7 Simulation : message de l'exemple numérique

L'article choisit $D = 1$, $g(x) = 1.25$, $\bar{g} \equiv 0$, d'où des noyaux explicites $k(x, y) = -g e^{g(x-y)}$ et $\ell(x, y) = -g$, et un quantificateur uniforme saturé. Les simulations (schéma de Lax–Friedrichs) illustrent :

- l'importance de la capture (si μ trop petit, saturation $\Rightarrow$ divergence) ;
- l'importance du dézoomer (si μ trop grand, erreur absolue trop grande $\Rightarrow$ pas de convergence fine) ;
- la décroissance synchronisée de $\|u(t)\|_\infty$ et de $\mu(t)$ sous la stratégie hybride.

8 Résumé opérationnel (réutilisation)

Checklist

1. Backstepping : construire k, ℓ pour obtenir une cible transport.
2. Gains : majorer/calculer M_1, M_2, M_3 .
3. Quantificateur : fixer (M, Δ) et choisir (λ, ν) .
4. Vérifier la condition suffisante sur Δ/M et donc $\Omega < 1$.
5. Implémenter : phase 1 ($U = 0$, $\mu \uparrow$) puis phase 2 (U quantifié, $\mu \downarrow$).

Références

- [1] N. Bekiaris-Liberis, Hybrid boundary stabilization of linear first-order hyperbolic PDEs despite almost quantized measurements and control input, *Systems & Control Letters*, 146 (2020), 104809.

9 Compensation simultanée du retard d'entrée et de la quantification [1]

10 Objectifs et feuille de route

Ce que vous saurez faire après lecture.

- Représenter un retard d'entrée constant D comme une EDP de transport à vitesse 1 couplée à une EDO.
- Comprendre et manipuler le (prédicteur) et la loi de prédiction nominale.
- Comprendre pourquoi une *transformation de backstepping* est introduite (construction d'un *système cible* ISS).
- Formaliser un *quantificateur dynamique* avec paramètre μ et ses propriétés fondamentales (seuil, erreur, zone morte).
- Comprendre la stratégie à deux phases : *agrandir la portée* puis *réduire l'erreur* en assurant une décroissance par facteurs.
- Suivre (et reproduire) la preuve : estimations explicites en boucle ouverte + ISS/petit gain en boucle fermée.

Organisation du cours.

1. Modèle EDO + EDP de transport (retard d'entrée), normes, régularité.
2. Loi nominale (sans quantification) : predictor-feedback et intuition.
3. Backstepping : passage au système cible (X, w) et équivalence de normes.
4. Quantificateur dynamique et commutation de $\mu(t)$.
5. Stabilité avec **quantification d'état** (X, u) .
6. Extension à la **quantification d'entrée** U .
7. Comment lire les constantes et comment paramétrer en pratique (lecture d'ingénierie).

Méthode (résumé) : stabilisation sous quantification via un quantificateur dynamique

Idée générale. La quantification introduit une erreur $e_q := u_q - u$ (contrôle quantifié moins contrôle nominal). On stabilise en deux phases en pilotant un *paramètre de zoom* $\mu(t)$: d'abord *éviter la saturation* (zoomer), puis *réduire l'erreur* (dézoomer).

$\|\cdot\|$ est la norme dans l'espace d'état

Phase 1 (boucle ouverte / mise à l'échelle). On impose $U(t) = 0$ et on établit une borne a priori (solution explicite/estimations) :

$$\|x(t)\| \leq C(t) \|x(0)\| \quad (0 \leq t \leq t_1^*).$$

On choisit $\mu(t)$ (souvent par paliers croissants) de sorte qu'à un premier instant t_1^* l'état soit *dans la plage du quantificateur (pas de saturation)*, typiquement $\left\| \frac{x(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\| \leq M\overline{M}$, (avec $\overline{M} < 1$, un paramètre d'ajustement). On trouve que $t_1^* \leq C^{-1} \left(\frac{\|x_0\|}{\mu_0(M\overline{M} - 2\Delta)} \right)$

Phase 2 (boucle fermée quantifiée). On réécrit le système bouclé fermé (avec le contrôle) comme le système nominal avec la perturbation liée à l'erreur e_q . On peut établir une estimation exponentielle ISS de type :

$$\|x(t)\| \leq c e^{-\delta(t-t_1^*)} \|x(t_1^*)\| + \gamma \sup_{t_1^* \leq s \leq t} \|e_q(s)\|.$$

Ensuite on établit que

$$\|e_q(t)\| \leq \frac{1}{1+\lambda} \|x(t)\| \quad (\lambda > 0, \text{ on peut utiliser une constante } < 1)$$

pourvu que

$$\Omega \overline{M} M \mu \leq \|x(t)\| \leq M \mu.$$

En fait, avec le quantificateur dynamique, on montre (dans la région non saturée) $\|e_q(t)\| \leq M_3 \mu \|q(\frac{x}{\mu}) - \frac{x}{\mu}\| \leq M_3 \Delta \mu(t)$. On met alors à jour $\mu(t)$ (par période/paliers/événements, p.ex. $\mu_{k+1} = \Omega \mu_k$ avec $0 < \Omega < 1$) pour maintenir la non-saturation et faire décroître $\Delta \mu(t)$, ce qui entraîne la stabilisation.

11 Modélisation : retard d'entrée comme EDP de transport

11.1 Système avec retard

On considère une EDO linéaire (dimension n) soumise à un retard constant $D > 0$ sur l'entrée :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t - D), \quad (20)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $U(t) \in \mathbb{R}$.

Truc standard : à chaque retard constant correspond une EDP de transport.

On pose, pour $x \in [0, D]$,

$$u(x, t) = U(t + x - D),$$

alors u satisfait l'EDP de transport

$$u_t(x, t) = u_x(x, t), \quad u(D, t) = U(t),$$

et l'EDO devient $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(0, t)$.

Ainsi, (20) est équivalente au couplage EDO–EDP :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(0, t), \quad (21)$$

$$u_t(x, t) = u_x(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (22)$$

$$u(D, t) = U(t). \quad (23)$$

11.2 Espace d'état, normes, régularité

On travaille dans $\mathbb{R}^n \times L^\infty([0, D]; \mathbb{R})$, muni de la norme

$$\|(X, u)\| := |X| + \|u(\cdot)\|_\infty, \quad \|u(\cdot)\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, D]} |u(x)|.$$

On notera que la quantification et les preuves se font à ce niveau de norme, car c'est la norme “naturelle” pour une EDP de transport en L^∞ .

Régularité (subtilité).

Pour éviter des pathologies de mesurabilité quand on compose un *quantificateur exact* (fonction en escaliers) avec un état PDE seulement continu, on suppose des “quantificateurs Lischitz” (localement lipschitziens). Cette hypothèse facilite l'existence/unicité ; les estimations de stabilité, elles, ne dépendent pas de la condition de Lipschitz.

12 Commande nominale : loi de prédiction (sans quantification)

12.1 Idée du prédicteur

Le retard signifie que l'entrée décidée à t n'agit sur l'EDO qu'à $t + D$. L'idée du *predictor-feedback* est alors :

calculer un “état prédit à l'horizon D ” et appliquer un retour d'état sur cet état prédit.

Prédiction de l'état.

Dans les systèmes linéaires, on peut exprimer explicitement l'état futur $X(t + D)$ en fonction de $X(t)$ et de l'historique d'entrée sur $[t, t + D]$ (ou, ici, de l'étatEDP $u(\cdot, t)$). La loi nominale est exactement ce retour d'état prédit.

12.2 Loi nominale

On choisit un gain $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tel que $A + BK$ soit Hurwitz. La loi nominale (sans quantification) s'écrit

$$U_{\text{nom}}(t) = K \int_0^D e^{A(D-y)} B u(y, t) dy + K e^{AD} X(t). \quad (24)$$

Cette formule se lit comme : “un retour sur $X(t)$ propagé jusqu'à $t + D$ ” + “une compensation exacte de la portion transportée”.

13 Backstepping : système cible et équivalence de normes

13.1 Pourquoi introduire w ?

En boucle fermée, l'EDP de transport est excitée à la frontière $x = D$ par l'erreur entre la commande appliquée et la commande nominale : $U(t) - U_{\text{nom}}(t)$. La transformation de backstepping construit une variable w dont la dynamique est *structurellement simple* et *ISS*.

Intuition backstepping.

On “dés-entrelace ” la boucle EDO–EDP en **absor-bant** les termes de couplage dans une transformation intégrale. Le prix à payer est une transformation non locale ; le bénéfice est une dynamique cible triangulaire où les effets de quantification apparaissent comme une perturbation à l'entrée de l'EDP, traitable par ISS + petit gain.

13.2 Transformation et système cible

La transformation est :

$$w(x, t) = u(x, t) - K \int_0^x e^{A(x-y)} B u(y, t) dy - K e^{Ax} X(t), \quad (25)$$

avec inverse

$$u(x, t) = w(x, t) + K \int_0^x e^{(A+BK)(x-y)} B w(y, t) dy + K e^{(A+BK)x} X(t). \quad (26)$$

Sous cette transformation, le système (EDO–EDP) devient :

$$\dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + B w(0, t), \quad (27)$$

$$w_t(x, t) = w_x(x, t), \quad (28)$$

$$w(D, t) = U(t) - U_{\text{nom}}(t). \quad (29)$$

Équivalence de normes. On dispose de constantes $M_1, M_2 > 0$ telles que

$$M_2 \|(X, u)\| \leq \|(X, w)\| \leq M_1 \|(X, u)\|. \quad (30)$$

Avec

$$M_1 = |K|e^{|A|D} \max\{1, D|B|\} + 1, \quad (31)$$

$$M_2 = \frac{1}{|K|e^{|A+BK|D} \max\{1, D|B|\} + 1}. \quad (32)$$

Pourquoi ces constantes sont importantes ?

Dans la preuve, on exprimera les conditions de quantification sur l'état original (X, u) , puis on passera au système cible (X, w) où l'analyse ISS est naturelle. L'équivalence (30) assure que stabiliser l'un stabilise l'autre, au prix de facteurs M_1, M_2 .

14 Quantification dynamique et loi de commande commutée

14.1 Quantificateur dynamique

On suppose que l'état EDO X et l'état EDP $u(\cdot, t)$ ne sont disponibles qu'en version quantifiée. On considère un quantificateur dynamique à paramètre $\mu > 0$:

$$q_\mu(X, u) = (q_{1,\mu}(X), q_{2,\mu}(u)) = \left(\mu q_1\left(\frac{X}{\mu}\right), \mu q_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \right), \quad (33)$$

où q_1 agit sur $\mathbb{R}^n$ et q_2 sur $L^\infty([0, D])$ (composante par composante).

Trois propriétés structurantes (portée / erreur / zone morte).

Il existe $M > \Delta > 0$ et $\hat{M} < M$ tels que :

- (P1) Si $\|(X, u)\| \leq M$, alors l'erreur de quantification est bornée :
 $\|(q_1(X) - X, q_2(u) - u)\| \leq \Delta$.
- (P2) Si $\|(X, u)\| > M$, alors la sortie du quantificateur *sort* de la zone centrale :
 $\|(q_1(X), q_2(u))\| > M - \Delta$.
- (P3) Si $\|(X, u)\| \leq \hat{M}$, alors $q_1(X) = 0$ et $q_2(u) = 0$ (zone morte).

14.2 Loi predictor-feedback avec mesures (presque) quantifiées

La loi utilisée est une version quantifiée de (24). On définit d'abord

$$P_\mu(X, u) = e^{AD} q_{1,\mu}(X) + \int_0^D e^{A(D-y)} B q_{2,\mu}(u(y)) dy, \quad (34)$$

et la commande commutée

$$U(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1^*, \\ K P_{\mu(t)}(X(t), u(\cdot, t)), & t > t_1^*. \end{cases} \quad (35)$$

Pourquoi couper la commande au début ?

Avec quantification, si l'état initial est *hors portée* du quantificateur, la commande construite à partir de mesures saturées/peu informatives peut échouer. On démarre donc par une phase **zoomer** où μ augmente : cela **agrandit la portée** jusqu'à ce que l'état rentre dans la zone où l'erreur est contrôlée (P1).

14.3 Stratégie de commutation pour $\mu(t)$

Le paramètre ajustable μ est choisi comme suit¹

$$\mu(t) = \begin{cases} \overline{M}_1 e^{2|A|(j+1)\tau} \mu_0, & (j-1)\tau \leq t \leq j\tau + \bar{\tau} \delta_j, \\ & 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{t_1^*}{\tau} \right\rfloor, \\ \mu(t_1^*), & t \in (t_1^*, t_1^* + T], \\ \Omega \mu(t_1^* + (i-1)T), & t \in (t_1^* + (i-1)T, \\ & t_1^* + iT], \quad i = 2, 3, \dots \end{cases}, \quad (36)$$

pour certains τ et $\mu_0 > 0$ fixés mais arbitraires, où $t_1^* = m\tau + \bar{\tau}$, pour un $m \in \mathbb{Z}_+$, $\bar{\tau} \in [0, \tau)$, et $\delta_m = 1, \delta_j = 0, j < m$, t_1^* étant le premier instant de temps auquel la relation suivante est vérifiée :

$$\left\| \mu(t_1^*) q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) + \left\| \mu(t_1^*) q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right\|_\infty \leq (M\overline{M} - \Delta) \mu(t_1^*), \quad (37)$$

La variable μ est **par morceaux constante** et suit deux phases.

Phase 1 : zoomer (augmentation de portée). Pour $0 \leq t \leq t_1^*$, μ croît suffisamment vite (construction discrète par pas τ) jusqu'à détecter l'évènement (36)

1. Dans le cas particulier où $|A| = 0$, on peut remplacer $|A|$ par une constante positive arbitraire ; tandis que si $m = 0$, alors la première composante de μ est appliquée pour $t \in [0, \bar{\tau}]$ (avec $j = 0$).

Phase 2 : dézoomer (réduction de l'erreur). Une fois (36) détecté, on maintient μ constant sur une durée T (temps de “relaxation ”), puis on le multiplie par un facteur $\Omega \in (0, 1)$, et on répète.

Lecture d'ingénierie : rôle de T et Ω .

- $\Omega < 1$ est le facteur de contraction désiré : on veut que la norme de l'état diminue d'un facteur Ω toutes les T unités de temps.
- T doit être assez grand pour que les propriétés de stabilité du système cible aient le temps de produire une décroissance effective (sinon, on “zoom” trop vite et on perd l'invariance des régions).

Les expressions des constantes sont :

$$M_3 = |K|e^{|A|D}(1 + |B|D), \quad (38)$$

$$\overline{M} = \frac{M_2}{M_1(1 + M_0)}, \quad (39)$$

$$\overline{M}_1 = 1 + D|B|, \quad (40)$$

$$\Omega = \frac{(1 + \lambda)(1 + M_0)^2 \Delta M_3}{M_2 M}, \quad (41)$$

$$T = -\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\Omega}{1 + M_0}\right). \quad (42)$$

$$M_0 = \max \left\{ (1 - \phi)^{-1} (1 - \varphi_1)^{-1} e^{D(\nu+1)}; (1 - \phi)^{-1} (1 - \varphi_1)^{-1} \phi M_\sigma \right\} \\ + \max \left\{ (1 - \varphi_1)^{-1} M_\sigma; (1 + \varepsilon) (1 - \phi)^{-1} (1 - \varphi_1)^{-1} e^{D(\nu+1)} \frac{M_\sigma}{\sigma} |B| \right\}, \quad (43)$$

$$\phi = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda} e^{D(\nu+1)} \text{ and } \varphi_1 = (1 + \varepsilon)(1 - \phi)^{-1} \phi \frac{M_\sigma}{\sigma} |B|, \quad (44)$$

Les paramètres $\delta \in (0, \min\{\sigma, \nu\})$, λ et M_0 sont choisis pour satisfaire une condition petit gain (voir Section 17).

15 Stabilité sous quantification d'état : résultat principal

Théorème 3 (Stabilité asymptotique globale sous quantification d'état). *Considérons le système (21)–(23) en boucle fermée avec la loi (35) et la commutation de $\mu(t)$ décrite ci-dessus. Si (A, B) est stabilisable et si le rapport erreur/portée du quantificateur vérifie*

$$\frac{\Delta}{M} < \frac{M_2}{(1 + M_0) \max\{M_3(1 + \lambda)(1 + M_0), 2\overline{M}_1\}}, \quad (45)$$

alors, pour tout (X_0, u_0) (avec u_0 est continue par morceau à gauche), il existe une solution unique, globale, et l'on obtient une estimation de type

$$|X(t)| + \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \gamma(|X_0| + \|u_0\|_\infty)^{(2 - \frac{\ln \Omega}{T|A|})} \exp\left(\frac{\ln \Omega}{T} t\right), \quad (46)$$

où $\Omega \in (0, 1)$ et $\gamma > 0$ sont explicités par la construction des constantes.

Remarque 1. La convergence est exponentielle en t (via $\exp((\ln \Omega/T)t)$), mais la borne dépend *non linéairement* des conditions initiales (puissance $2 - \ln \Omega/(T|A|)$). On parle donc de stabilité asymptotique globale, plutôt que de stabilité exponentielle globale au sens strict.

15.1 Plan de preuve

Deux ingrédients, deux phases.

1. **Phase de zoom** : boucle ouverte ($U = 0$), à partir de la solution explicite de l'EDP et de la formule de variation des constantes pour l'EDO, on borne (X, u) . En augmentant μ , on force l'état à rentrer dans la portée du quantificateur, donc on détecte un temps t_1^* tel que l'évènement (36) est vrai.
2. **Phase de dézoom** : pour μ fixé, on étudie le système cible (X, w) : les erreurs de quantification apparaissent comme une perturbation $d(t)$ à la frontière de l'EDP. On obtient des estimations ISS sur l'EDO et sur l'EDP, puis on les boucle par un *petit gain* pour obtenir une décroissance. On choisit T et Ω pour garantir : “toutes les T , la norme est multipliée par Ω ”.

Lecture de la preuve. La preuve procède en trois sous-étapes :

1. **ISS EDO** : variation des constantes + (66) + fading memory.
2. **ISS EDP** : estimation sup-norm pour $w_t = w_x$ + fading memory.
3. **petit gain** : dans la région où P1 est valable, majoration de $|d(t)|$ par $\frac{1}{1+\lambda}(|X| + \|w\|)$, puis fermeture et définition de M_0, Ω, T .

□

Bouclage final : preuve du Théorème 1

- Schéma de preuve.*
1. Par le Lemme 1, il existe t_1^* tel que l'état entre dans la portée : $|X(t_1^*)| + \|u(t_1^*)\| \leq MM\mu(t_1^*)$.
 2. Par équivalence de normes (30), on en déduit une borne sur (X, w) à t_1^* .
 3. Sur $[t_1^*, t_1^* + T]$, μ est constant : le Lemme 2 donne une décroissance et une entrée dans une bande plus petite.
 4. On met ensuite à jour $\mu \leftarrow \Omega\mu$ et on répète par induction : toutes les T , la norme est multipliée par Ω .
 5. On revient à (X, u) par (30), d'où (46).
 6. L'existence/unicité provient de : (i) solution explicite en boucle ouverte, (ii) lipschitzianité locale du feedback quantifié sur chaque intervalle où μ est constant.

□

16 Phase 1 : zoomer et détection d'entrée en portée

16.1 Boucle ouverte et bornes explicites

Pendant $0 \leq t \leq t_1^*$, on impose $U(t) = 0$. Le système est

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(0, t), \quad (47)$$

$$u_t = u_x, \quad u(D, t) = 0. \quad (48)$$

Encadré — Idée clef / Intuition

Caractéristiques pour l'EDP de transport.

L'EDP $u_t = u_x$ transporte le profil vers la gauche (vers $x = 0$) à vitesse 1. Avec une condition à la frontière $x = D$ nulle, les caractéristiques qui sortent du domaine imposent $u = 0$ après un temps D sur la partie “à droite”. En particulier, on a simplement $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$.

On obtient donc

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty.$$

Puis, par variation des constantes,

$$|X(t)| \leq \overline{M}_1 e^{|A|t} (|X_0| + \|u_0\|_\infty), \quad \overline{M}_1 = 1 + D|B|.$$

D'où une borne globale sur $[0, t_1^*]$:

$$|X(t)| + \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \overline{M}_1 e^{|A|t} (|X_0| + \|u_0\|_\infty). \quad (49)$$

16.2 Pourquoi l'évènement est détectable ?

L'évènement (36) ne demande pas X ni u à haute précision : il est formulé en fonction de $q_{1,\mu}(X)$, $q_{2,\mu}(u)$ et μ lui-même, qui sont supposés disponibles.

Lemme 3. Soient Δ et M satisfaisant (45). Il existe un instant t_1^* vérifiant

$$t_1^* \leq \frac{1}{|A|} \ln \left(\frac{\frac{1}{\mu_0} (|X_0| + \|u_0\|_\infty)}{(M\overline{M} - 2\Delta)} \right), \quad (50)$$

tel que (36) soit satisfaite, et, par conséquent, on a également

$$|X(t_1^*)| + \|u(t_1^*)\|_\infty \leq M\overline{M}\mu(t_1^*). \quad (51)$$

Idee de preuve (guidée). On combine : (i) la borne (49) (croissance au plus exponentielle), (ii) la croissance imposée de $\mu(t)$ (plus rapide que cette croissance), (iii) la propriété (P1) qui garantit une erreur $\leq \Delta$ lorsque l'argument est dans la portée. Le cœur du raisonnement est un argument de contradiction : si l'état n'était pas dans la portée, (P2) forcerait la sortie du quantificateur à violer (36). $\square$

Démonstration. Pour tout $0 \leq t \leq t_1^*$, on a par définition (35) $U(t) = 0$, et le système en boucle ouverte correspondant s'écrit

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(0, t), \quad (52)$$

$$u_t(x, t) = u_x(x, t), \quad (53)$$

$$u(D, t) = 0. \quad (54)$$

En utilisant la méthode des caractéristiques, la solution du sous-système de transport est donnée par $u(x, t) = u_0(x + t)$ pour $0 \leq x + t \leq D$ et $u(x, t) = 0$ pour $x + t > D$. Ainsi,

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty. \quad (55)$$

À partir de (55), la formule de variation des constantes appliquée à l'EDO, pour $0 \leq t \leq t_1^*$, donne

$$|X(t)| \leq \overline{M}_1 e^{|A|t} (|X_0| + \|u_0\|_\infty), \quad (56)$$

où $\overline{M}_1$ est donné par (40). Par conséquent, en combinant (55) et (56), on obtient pour $0 \leq t \leq t_1^*$

$$|X(t)| + \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \overline{M}_1 e^{|A|t} (|X_0| + \|u_0\|_\infty). \quad (57)$$

En choisissant le signal de commutation μ conformément à (36), on en déduit l'existence d'un instant t_1^* vérifiant (50) tel que

$$\frac{|X(t_1^*)|}{\mu(t_1^*)} + \frac{\|u(\cdot, t_1^*)\|_\infty}{\mu(t_1^*)} \leq M\overline{M} - 2\Delta. \quad (58)$$

Ainsi, en utilisant la propriété $P1$ du quantificateur et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}
\left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right\|_\infty &= \left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) - \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} + \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right| \\
&\quad + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) - \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} + \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\|_\infty \\
&\leq \left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) - \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) - \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\|_\infty \\
&\quad + \frac{|X(t_1^*)|}{\mu(t_1^*)} + \frac{\|u(t_1^*)\|_\infty}{\mu(t_1^*)} \\
&\leq M\overline{M} - \Delta.
\end{aligned} \tag{59}$$

Cela implique que la relation (37) est satisfaite.

Nous allons maintenant montrer que la détection de l'événement (37), combinée aux propriétés du quantificateur, garantit qu'à l'instant t_1^* , la relation (51) est également vraie. Pour cela, excluons d'abord la possibilité que

$$\left| \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right| + \left\| \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\|_\infty > M.$$

Si c'était le cas, alors, grâce à la propriété $P2$ du quantificateur, l'inégalité

$$\left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right\|_\infty > M - \Delta \tag{60}$$

serait vérifiée, et par conséquent, comme $\overline{M} \leq 1$,

$$\left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right\|_\infty > M\overline{M} - \Delta \tag{61}$$

serait également satisfaite. Ceci contredit (37). Ainsi,

$$\left| \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right| + \left\| \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\|_\infty \leq M$$

est vrai.

Vérifions maintenant si l'on peut avoir

$$M\overline{M} < \left| \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right| + \left\| \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\|_\infty \leq M. \tag{62}$$

Dans ce cas, la propriété $P1$ du quantificateur impliquerait

$$\left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) - \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) - \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\|_\infty \leq \Delta. \tag{63}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit de (63)

$$\begin{aligned}
\left| \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right| + \left\| \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\|_\infty &\leq \left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) - \frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) - \frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right\|_\infty \\
&\quad + \left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right\|_\infty \\
&\leq \Delta + \left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right\|_\infty.
\end{aligned}$$

En combinant cette dernière inégalité avec (62), on obtient

$$\overline{M}M - \Delta < \left| q_1 \left(\frac{X(t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right| + \left\| q_2 \left(\frac{u(\cdot, t_1^*)}{\mu(t_1^*)} \right) \right\|_\infty, \tag{64}$$

ce qui contredit (37). Ainsi, (51) est également valable. $\square$

17 Phase 2 : ISS et petit gain sur le système cible (Lemme 2)

17.1 Réécriture du système cible comme interconnexion ISS

Pour $t > t_1^*$, la commande est active et l'on travaille sur (27)–(29). La différence entre la commande quantifiée et la commande nominale apparaît à la frontière $x = D$ de l'EDP de w . On peut l'écrire sous forme d'une *perturbation* $d(t)$.

Perturbation due à la quantification (cas quantification d'état). La frontière du système cible prend la forme

$$w(D, t) = d(t),$$

avec

$$d(t) = Ke^{AD}\mu(t)\left(q_1\left(\frac{X(t)}{\mu(t)}\right) - \frac{X(t)}{\mu(t)}\right) + K \int_0^D e^{A(D-y)}B\mu(t)\left(q_2\left(\frac{u(y, t)}{\mu(t)}\right) - \frac{u(y, t)}{\mu(t)}\right)dy. \quad (65)$$

Input-to-State Stability (ISS) en une phrase.

Un système est ISS si sa solution est bornée par (*décroissance du résidu initial*) + (*gain sur l'amplitude du signal d'entrée*). Ici, l'entrée est $d(t)$ pour l'EDP, et $w(0, t)$ pour l'EDO.

17.2 Deux briques ISS

Brique 1 (EDO stable excitée par $w(0, t)$). Comme $A + BK$ est Hurwitz, il existe $M_\sigma > 1$, $\sigma > 0$ tels que

$$\|e^{(A+BK)t}\| \leq M_\sigma e^{-\sigma t}. \quad (66)$$

Par variation des constantes, puis un argument de *fading memory* (Lemme classique), on obtient une estimation de type

$$|X|_{[t_1^*, t]} \leq c_X |X(t_1^*)| + g_X \|w\|_{[t_1^*, t]},$$

où les “normes à poids exponentiel” sont définies ci-dessous.

Fading Memory ISS : Conversion d'une inégalité de type ISS avec sommation en une inégalité à mémoire décroissante.

Pour tout $\sigma > 0$, $M \geq 1$, $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta \in (0, \sigma)$ ayant la propriété suivante : si $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions localement bornées pour lesquelles il existe une constante $\gamma \geq 0$ telle que l'inégalité suivante soit vérifiée pour tout $t_0 \geq 0$ et tout $t \geq t_0$,

$$\varphi(t) \leq M \exp(-\sigma(t - t_0)) \varphi(t_0) + \gamma \sup_{t_0 \leq s \leq t} (y(s)), \quad (67)$$

alors l'inégalité suivante est satisfaite pour tout $t \geq 0$:

$$\varphi(t) \leq M \exp(-\delta t) \varphi(0) + \gamma(1 + \varepsilon) \sup_{0 \leq s \leq t} (y(s) \exp(-\delta(t - s))). \quad (68)$$

Il est important de souligner que l'inégalité (67) est vérifiée pour tout $t_0 \geq 0$, car, dans les applications, cette propriété est garantie par la propriété de semi-groupe.

Brique 2 (EDP de transport excitée par $d(t)$). Pour l'EDP $w_t = w_x$ avec condition de frontière $w(D, t) = d(t)$, on a une estimation ISS en norme sup :

$$\|w(\cdot, t)\|_\infty \leq (\text{décroissance}) \cdot \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty + (\text{gain}) \cdot \sup_{s \in [t_1^*, t]} |d(s)|.$$

Puis, encore, on applique un fading memory pour obtenir une version pondérée.

17.3 Normes pondérées et fermeture petit gain

On fixe $\delta \in (0, \min\{\sigma, \nu\})$ et on pose :

$$\|w\|_{[t_1^*, t]} := \operatorname{ess\,sup}_{t_1^* \leq s \leq t} \|w(\cdot, s)\|_\infty e^{\delta(s-t_1^*)}, \quad (69)$$

$$|X|_{[t_1^*, t]} := \operatorname{ess\,sup}_{t_1^* \leq s \leq t} |X(s)| e^{\delta(s-t_1^*)}. \quad (70)$$

On obtient alors un système d'inégalités du type

$$|X|_{[t_1^*, t]} \leq a_1 |X(t_1^*)| + a_2 \|w\|_{[t_1^*, t]}, \quad \|w\|_{[t_1^*, t]} \leq b_1 \|w(t_1^*)\| + b_2 \sup |d|_{[t_1^*, t]} + b_3 |X|_{[t_1^*, t]}.$$

La difficulté est donc de **lier** $\sup |d|$ à $|X| + \|w(\cdot, t)\|_\infty$ via les propriétés (P1) du quantificateur et l'inverse backstepping (26).

Le pas crucial : interpréter $d(t)$ comme “petite ” perturbation.

Quand l'état est dans la portée (P1), l'erreur de quantification est $\leq \Delta$. Comme $d(t)$ est *linéaire* en cette erreur, on obtient $|d(t)| \leq \operatorname{const} \cdot \Delta\mu$. Ensuite, la stratégie de dézoomer impose que l'état reste à l'intérieur d'une bande proportionnelle à μ . On en déduit $|d(t)| \leq \frac{1}{1+\lambda} (|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty)$, ce qui est exactement une forme petit gain.

Condition petit gain et choix de λ

On choisit λ grand de sorte que

$$\frac{e^D}{1+\lambda} \left(\frac{M_\sigma}{\sigma} |B| + 1 \right) < 1. \quad (71)$$

Lemme 4. Choisir K de sorte que $A + BK$ soit de Hurwitz et soient $\sigma, M_\sigma > 0$ tels que (66) soit vérifiée. Sélectionner λ suffisamment grand de manière à ce que la condition de petit-gain (71) soit satisfaite. Alors, les solutions du système cible (27)–(29) avec le contrôleur quantifié (35), ce qui conduit à

$$w(D, t) = K e^{AD} \mu(t) \left(q_1 \left(\frac{X(t)}{\mu(t)} \right) - \frac{X(t)}{\mu(t)} \right) + K \int_0^D e^{A(D-y)} B \mu(t) \left(q_2 \left(\frac{u(y, t)}{\mu(t)} \right) - \frac{u(y, t)}{\mu(t)} \right) dy,$$

où u est donné en fonction de (X, w) par la transformation inverse de backstepping (26), et qui vérifient, pour μ fixé,

$$|X(t_1^*)| + \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty \leq \frac{M_2}{1 + M_0} M\mu, \quad (72)$$

satisfont, pour $t_1^* < t \leq t_1^* + T$,

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq \max \left\{ M_0 e^{-\delta(t-t_1^*)} (|X(t_1^*)| + \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty), \Omega \frac{M_2}{1 + M_0} M\mu \right\}. \quad (73)$$

En particulier, on a

$$|X(t_1^* + T)| + \|w(t_1^* + T)\|_\infty \leq \Omega \frac{M_2}{1 + M_0} M\mu. \quad (74)$$

Démonstration. En vertu de (71), puisque la fonction

$$h(s_1, s_2) = \frac{1 + s_1}{1 + \lambda} e^{D(s_2+1)} \left(\frac{M_\sigma}{\sigma} |B| (s_1 + 1) + 1 \right), \quad (75)$$

est continue en $(0, 0)$ et vérifie $h(0, 0) < 1$, il existe des constantes ε et $\nu > 0$ telles que $h(\varepsilon, \nu) < 1$, c'est-à-dire

$$\frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda} e^{D(\nu+1)} \left(\frac{M_\sigma}{\sigma} |B| (\varepsilon + 1) + 1 \right) < 1. \quad (76)$$

Cette condition implique

$$\frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda} e^{D(\nu+1)} < 1. \quad (77)$$

En utilisant (27), on obtient, via la formule de variation des constantes,

$$X(t) = e^{(A+BK)t} X(t_1^*) + \int_{t_1^*}^t e^{(A+BK)(t-s)} B w(0, s) ds. \quad (78)$$

En utilisant la relation (66), la relation (78) donne

$$|X(t)| \leq M_\sigma e^{-\sigma(t-t_1^*)} |X(t_1^*)| + \frac{M_\sigma}{\sigma} |B| \sup_{t_1^* \leq s \leq t} (\|w(\cdot, s)\|_\infty). \quad (79)$$

En appliquant le lemme de *fading memory* [2, Lemme 7.1], pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 \in (0, \sigma)$ tel que

$$|X(t)| e^{\delta_1(t-t_1^*)} \leq M_\sigma |X(t_1^*)| + (1 + \varepsilon) \frac{M_\sigma}{\sigma} |B| \sup_{t_1^* \leq s \leq t} (\|w(s)\|_\infty e^{\delta_1(s-t_1^*)}). \quad (80)$$

Pour le sous-système de transport (27), (29), on peut invoquer l'estimation ISS en norme sup dans [?, estimation (2.23)] pour obtenir, pour tout $\nu > 0$,

$$\|w(\cdot, t)\|_\infty \leq e^{-\nu(t-t_1^*-D)} e^D \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty + e^{D(1+\nu)} \sup_{t_1^* \leq s \leq t} (|d(s)|), \quad (81)$$

où

$$d(t) = K e^{AD} \mu(t) \left(q_1 \left(\frac{X(t)}{\mu(t)} \right) - \frac{X(t)}{\mu(t)} \right) K \int_0^D e^{A(D-y)} B \mu(t) \left(q_2 \left(\frac{u(y, t)}{\mu(t)} \right) - \frac{u(y, t)}{\mu(t)} \right) dy, \quad (82)$$

avec u donné en fonction de (X, w) par la transformation inverse de backstepping (26). En appliquant l'inégalité de *fading memory* [2, Lemme 7.1], il existe $\delta_2 \in (0, \nu)$ tel que

$$\|w(\cdot, t)\|_\infty e^{\delta_2(t-t_1^*)} \leq e^{D(\nu+1)} \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty + e^{D(\nu+1)} (1 + \varepsilon) \sup_{t_1^* \leq s \leq t} (|d(s)| e^{\delta_2(s-t_1^*)}). \quad (83)$$

Soit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, de sorte que $\delta \in (0, \min\{\sigma, \nu\})$. Maintenant, pour tout $t \geq t_1^*$, définissons les quantités suivantes :

$$\|w\|_{[t_1^*, t]} := \text{ess sup}_{t_1^* \leq s \leq t} \|w(\cdot, s)\|_\infty e^{\delta(s-t_1^*)}, \quad (84)$$

$$|X|_{[t_1^*, t]} := \text{ess sup}_{t_1^* \leq s \leq t} |X(s)| e^{\delta(s-t_1^*)}. \quad (85)$$

On obtient donc, à partir de (80) et (83), en utilisant (84) et (85),

$$|X|_{[t_1^*, t]} \leq M_\sigma |X(t_1^*)| + (1 + \varepsilon) \frac{M_\sigma}{\sigma} |B| \|w\|_{[t_1^*, t]}, \quad (86)$$

et

$$\|w\|_{[t_1^*, t]} \leq e^{D(\nu+1)} (1 + \varepsilon) \sup_{t_1^* \leq s \leq t} (|d(s)| e^{\delta(s-t_1^*)}) + e^{D(\nu+1)} \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty. \quad (87)$$

Estimons maintenant le terme $\sup_{t_1^* \leq s \leq t} (|d(s)|e^{\delta(s-t_1^*)})$. D'après (82), pour $t_1^* < t \leq t_1^* + T$,

$$\begin{aligned} |d| &\leq |Ke^{AD}| \mu \left| q_1 \left(\frac{X}{\mu} \right) - \frac{X}{\mu} \right| + D \sup_{0 \leq y \leq D} |Ke^{A(D-y)} B| \mu \left\| q_2 \left(\frac{u}{\mu} \right) - \frac{u}{\mu} \right\|_{\infty} \\ &\leq M_3 \mu \left\| q_1 \left(\frac{X}{\mu} \right) - \frac{X}{\mu}, q_2 \left(\frac{u}{\mu} \right) - \frac{u}{\mu} \right\|. \end{aligned} \quad (88)$$

où M_3 est défini en (38) et u est donné en fonction de (X, w) par la transformation inverse de backstepping (26).

Supposons que

$$\Omega \frac{M_2}{(1 + M_0)^2} M \mu \leq |X| + \|w\|_{\infty} \leq M_2 M \mu. \quad (89)$$

Alors, grâce à la propriété P1 du quantificateur, au membre de gauche de la borne (30), et à la définition (41) de Ω , on obtient

$$\begin{aligned} |d| &\leq M_3 \Delta \mu \\ &\leq \frac{(1 + M_0)^2 M_3 \Delta}{\Omega M_2 M} (|X| + \|w\|_{\infty}) \\ &\leq \frac{1}{1 + \lambda} (|X| + \|w\|_{\infty}). \end{aligned} \quad (90)$$

Par conséquent, tant que (89) est satisfaite, on a

$$\sup_{t_1^* \leq s \leq t} (|d(s)|e^{\delta(s-t_1^*)}) \leq \frac{1}{1 + \lambda} \|w\|_{[t_1^*, t]} + \frac{1}{1 + \lambda} |X|_{[t_1^*, t]}. \quad (91)$$

Ainsi, en utilisant (87) et (44), on obtient

$$\|w\|_{[t_1^*, t]} \leq e^{D(\nu+1)} \|w(\cdot, t_1^*)\|_{\infty} + \frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda} e^{D(\nu+1)} \|w\|_{[t_1^*, t]} + \frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda} e^{D(\nu+1)} |X|_{[t_1^*, t]}, \quad (92)$$

et donc

$$\|w\|_{[t_1^*, t]} \leq (1 - \phi)^{-1} e^{D(\nu+1)} \|w(\cdot, t_1^*)\|_{\infty} + (1 - \phi)^{-1} \phi |X|_{[t_1^*, t]}, \quad (93)$$

avec $\phi = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda} e^{D(\nu+1)} < 1$.

En combinant (86) et (93), on obtient

$$\|w\|_{[t_1^*, t]} \leq (1 - \phi)^{-1} (1 - \varphi_1)^{-1} e^{D(\nu+1)} \|w(\cdot, t_1^*)\|_{\infty} + (1 - \phi)^{-1} \phi M_{\sigma} (1 - \varphi_1)^{-1} |X(t_1^*)|, \quad (94)$$

où l'on utilise le fait que, d'après (44), on a

$$\varphi_1 = (1 + \varepsilon)(1 - \phi)^{-1} \phi \frac{M_{\sigma}}{\sigma} |B| < 1.$$

En combinant encore (86) et (93), on arrive également à

$$\begin{aligned} |X|_{[t_1^*, t]} &\leq (1 + \varepsilon) \frac{M_{\sigma}}{\sigma} |B| (1 - \phi)^{-1} e^{D(\nu+1)} \|w(\cdot, t_1^*)\|_{\infty} \\ &\quad + M_{\sigma} |X(t_1^*)| + (1 + \varepsilon) \frac{M_{\sigma}}{\sigma} |B| (1 - \phi)^{-1} \phi |X|_{[t_1^*, t]}, \end{aligned} \quad (95)$$

c'est-à-dire

$$|X|_{[t_1^*, t]} \leq (1 - \varphi_1)^{-1} M_{\sigma} |X(t_1^*)| + (1 + \varepsilon) (1 - \phi)^{-1} (1 - \varphi_1)^{-1} e^{D(\nu+1)} \frac{M_{\sigma}}{\sigma} |B| \|w(t_1^*)\|_{\infty}. \quad (96)$$

On déduit alors de (94) que

$$\|w\|_{[t_1^*, t]} \leq C_0 (|X(t_1^*)| + \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty), \quad (97)$$

avec

$$C_0 = \max \left\{ (1 - \phi)^{-1} (1 - \varphi_1)^{-1} e^{D(\nu+1)}; (1 - \phi)^{-1} (1 - \varphi_1)^{-1} \phi M_\sigma \right\}, \quad (98)$$

et de (96) que

$$|X|_{[t_1^*, t]} \leq C_1 (|X(t_1^*)| + \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty), \quad (99)$$

avec

$$C_1 = \max \left\{ (1 - \varphi_1)^{-1} M_\sigma; (1 + \varepsilon) (1 - \phi)^{-1} (1 - \varphi_1)^{-1} e^{D(\nu+1)} \frac{M_\sigma}{\sigma} |B| \right\}. \quad (100)$$

En posant alors $M_0 = C_0 + C_1$, on obtient

$$|X|_{[t_1^*, t]} + \|w\|_{[t_1^*, t]} \leq M_0 (|X(t_1^*)| + \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty), \quad (101)$$

et, en utilisant les définitions (84), (85), on obtient

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq M_0 e^{-\delta(t-t_1^*)} (|X(t_1^*)| + \|w(\cdot, t_1^*)\|_\infty). \quad (102)$$

Pour $t_1^* < t \leq t_1^* + T$, en utilisant (72), le fait que $e^{-\delta(t-t_1^*)} \leq 1$, et $\frac{M_0}{1+M_0} < 1$, on a

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq M_2 M \mu. \quad (103)$$

De plus, à l'instant $t_1^* + T$, grâce à (72) et à la définition (42) de T , on déduit de (102) que

$$|X(t_1^* + T)| + \|w(t_1^* + T)\|_\infty \leq \Omega \frac{M_2}{1 + M_0} M \mu. \quad (104)$$

Notons que les relations (101) et (104) sont établies à condition que $\Omega \frac{M_2}{(1+M_0)^2} M \mu \leq |X| + \|w\|_\infty$. Si un instant t_1 existe, avec $t_1^* \leq t_1 \leq t_1^* + T$, auquel les solutions satisfont

$$|X(t_1)| + \|w(\cdot, t_1)\|_\infty \leq \Omega \frac{M_2}{(1 + M_0)^2} M \mu, \quad (105)$$

alors elles satisfont également, pour $t_1 \leq t \leq t_1^* + T$,

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq \Omega \frac{M_2}{1 + M_0} M \mu, \quad (106)$$

et, en combinant cette estimation avec (102), on obtient la borne (73).

Pour le voir, notons qu'une fois que les solutions peuvent rentrer à nouveau dans la région où (89) est satisfaite (si cela arrive), l'analyse précédente redevient valable. En particulier, l'estimation correspondante est activée, ce qui implique que les solutions restent dans la région où (106) est satisfaite. $\square$

Preuve du Théorème 3 : L'inégalité $|X(t_1^*)| + \|u(\cdot, t_1^*)\|_\infty \leq M \bar{M} \mu$ du Lemme 3 est vérifiée avec la constante $\mu = \mu(t_1^*)$. Par conséquent, en utilisant (30) et la définition (39) de $\bar{M}$, l'inégalité (72) est satisfaite. En appliquant ensuite le Lemme 4, où μ est mis à jour selon (36), l'inégalité (73) est vérifiée avec $\mu = \mu(t) = \mu(t_1^* + T)$. Ainsi, la relation (73) implique que (72) est satisfaite mais avec $t_1^* \rightarrow t_1^* + T$ et $\mu = \mu(t_1^* + 2T) = \Omega \mu(t_1^* + T) = \Omega \mu(t_1^*)$. En appliquant à nouveau le Lemme 4, on obtient pour $t_1^* + T < t \leq t_1^* + 2T$ et $\mu = \mu(t_1^* + 2T)$

$$|X(t_1^* + 2T)| + \|w(\cdot, t_1^* + 2T)\|_\infty \leq \Omega^2 \frac{M_2}{1 + M_0} M \mu(t_1^*). \quad (107)$$

En utilisant l'estimation (72) du Lemme 4, on a pour $t_1^* + T < t \leq t_1^* + 2T$

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq \max \left\{ M_0 e^{-\delta(t-t_1^*-T)} (|X(t_1^* + T)| + \|w(t_1^* + T)\|_\infty), \Omega \frac{M_2}{1 + M_0} M\mu(t) \right\}. \quad (108)$$

Par conséquent, puisque dans (36), pour $t_1^* + T < t \leq t_1^* + 2T$, on a $\mu(t) = \Omega\mu(t_1^*)$, en utilisant (74) on obtient pour $t_1^* + T < t \leq t_1^* + 2T$

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq \Omega M_2 M\mu(t_1^*). \quad (109)$$

En répétant cette procédure, on arrive à

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq \Omega^{i-1} M_2 M\mu(t_1^*), \quad (110)$$

pour tout $t_1^* + (i-1)T < t \leq t_1^* + iT$. Par conséquent, pour $t_1^* + (i-1)T < t \leq t_1^* + iT$, $i = 1, 2, \dots$, on obtient

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq \Omega^{\left(\frac{t-t_1^*}{T}\right)} \frac{M_2 M}{\Omega} \mu(t_1^*). \quad (111)$$

D'après la définition de μ dans (36), on a

$$\mu(t_1^*) \leq \overline{M}_1 e^{2|A|\tau} e^{2|A|t_1^*} \mu_0, \quad (112)$$

et donc, pour $t \geq t_1^*$, il découle de (111) que

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq \mu_0 \overline{M}_1 \frac{M_2 M}{\Omega} e^{2|A|\tau} e^{2|A|t_1^*} e^{(t-t_1^*) \frac{\ln \Omega}{T}}. \quad (113)$$

En utilisant l'estimation (57) et l'inégalité (30), on obtient

$$|X(t)| + \|w(\cdot, t)\|_\infty \leq \overline{M}_1 M_1 e^{|A|t} (|X_0| + \|u_0\|_\infty), \quad (114)$$

pour $0 \leq t \leq t_1^*$. En combinant ces deux dernières estimations et l'inégalité (30), on obtient pour tout $t \geq 0$

$$|X(t)| + \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \max \left\{ e^{|A|t_1^*}, |X_0| + \|u_0\|_\infty \right\} \overline{M}_2 e^{|A|t_1^*} e^{-\frac{\ln \Omega}{T} t_1^*} e^{\frac{\ln \Omega}{T} t}, \quad (115)$$

où

$$\overline{M}_2 = \frac{\overline{M}_1}{M_2} \max \left\{ \frac{M_2 M}{\Omega} e^{2|A|\tau} \mu_0, M_1 \right\}. \quad (116)$$

D'après (50), on a

$$t_1^* \leq \frac{1}{|A|} \ln \left[\overline{M}_3 (|X_0| + \|u_0\|_\infty) \right], \quad (117)$$

avec

$$\overline{M}_3 = \frac{1}{\mu_0 (M\overline{M} - 2\Delta)}. \quad (118)$$

Ainsi,

$$e^{|A|t_1^*} \leq \overline{M}_3 (|X_0| + \|u_0\|_\infty). \quad (119)$$

De plus,

$$-\frac{\ln \Omega}{T} t_1^* \leq -\frac{\ln \Omega}{T} \frac{1}{|A|} \ln \left[\overline{M}_3 (|X_0| + \|u_0\|_\infty) \right], \quad (120)$$

et donc,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\ln \Omega}{T} t_1^*} &\leq e^{\ln \bar{M}_3 (|X_0| + \|u_0\|_\infty)^{-\frac{\ln \Omega}{T} \times \frac{1}{|A|}}} \\ &\leq \bar{M}_3^{-\frac{\ln \Omega}{T} \times \frac{1}{|A|}} (|X_0| + \|u_0\|_\infty)^{-\frac{\ln \Omega}{T} \times \frac{1}{|A|}}. \end{aligned} \quad (121)$$

D'après (119) et (121), on obtient

$$\max \left\{ e^{|A|t_1^*}, |X_0| + \|u_0\|_\infty \right\} \leq (|X_0| + \|u_0\|_\infty) \max \left\{ \bar{M}_3, 1 \right\}, e^{|A|t_1^*} e^{-\frac{\ln \Omega}{T} t_1^*} \quad (122)$$

$$\leq \bar{M}_3^{\left(1 - \frac{\ln \Omega}{T} \times \frac{1}{|A|}\right)} (|X_0| + \|u_0\|_\infty)^{\left(1 - \frac{\ln \Omega}{T|A|}\right)}. \quad (123)$$

Par conséquent, à partir de (123), on arrive à

$$|X(t)| + \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \max \left\{ \bar{M}_3, 1 \right\} \bar{M}_2 \bar{M}_3^{\left(1 - \frac{\ln \Omega}{T} \times \frac{1}{|A|}\right)} (|X_0| + \|u_0\|_\infty)^{\left(2 - \frac{\ln \Omega}{T} \times \frac{1}{|A|}\right)} e^{\frac{\ln \Omega}{T} t}, \quad (124)$$

ce qui donne (46).

18 Extension : quantification de l'entrée (au lieu des mesures d'état)

18.1 Cas : U quantifié, mesures (X, u) non quantifiées

On suppose que l'on mesure X et u (donc U_{nom} est calculable), mais que l'entrée appliquée est quantifiée. On introduit un quantificateur scalaire $\bar{q}_\mu(\cdot) = \mu \bar{q}(\cdot/\mu)$ satisfaisant les analogues de (P1)–(P3). La loi devient

$$U(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \bar{t}_1^*, \\ \bar{q}_{\mu(t)}(U_{\text{nom}}(t)), & t > \bar{t}_1^*, \end{cases} \quad (125)$$

avec U_{nom} donné par (24).

18.2 Évènement et commutation

L'évènement de passage en dézoomer change : comme on ne quantifie plus les mesures, l'évènement est formulé directement sur la norme de l'état :

$$|X(\bar{t}_1^*)| + \|u(\cdot, \bar{t}_1^*)\|_\infty \leq \frac{MM}{M_3} \mu(\bar{t}_1^*). \quad (126)$$

La loi de $\mu(t)$ garde la même structure (zoomer puis dézoomer), avec les constantes définies à partir de (38)–(42).

18.3 Résultat

Théorème 4 (Stabilité sous quantification d'entrée). *Sous stabilisabilité de (A, B) et sous la condition*

$$\frac{\Delta}{M} < \frac{M_2}{M_3(1 + \lambda)(1 + M_0)^2},$$

la boucle fermée (21)–(23) avec (125) est globalement asymptotiquement stable (même type de borne que (46)).

Même preuve, perturbation différente.

La variable perturbatrice n'est plus l'erreur de mesure, mais l'erreur d'actionnement

$$\bar{d}(t) = U_{\text{nom}}(t) - \bar{q}_{\mu(t)}(U_{\text{nom}}(t)).$$

On montre, dans la région de portée, que $|\bar{d}(t)| \leq \frac{1}{1+\lambda}(|X| + \|w\|)$, puis on répète la boucle ISS + petit gain.

19 Commentaires pratiques : comment dimensionner et interpréter les constantes

19.1 Ce que la condition Δ/M dit vraiment

Le rapport Δ/M capture l'idée suivante :

pour une portée donnée, l'erreur relative du quantificateur doit être assez petite pour que l'effet de quantification soit un “gain < 1” dans la boucle ISS.

Plus D est grand, plus l'interconnexion EDO–EDP a du gain, et donc plus il faut réduire Δ/M (ou augmenter λ , ce qui contraint indirectement Ω).

19.2 Pourquoi un *switched* predictor-feedback ?

Un predictor-feedback à quantification fixe peut stabiliser seulement à partir d'une région (ou risquer d'échouer hors portée). La commutation ajoute un *mécanisme d'auto-adaptation* :

- **zoomer** : “je ne sais pas où est l'état, j'augmente la portée”.
- **dézoomer** : “maintenant je sais où est l'état, je réduis l'erreur pour converger”.

19.3 Lien avec des cascades EDO–EDP plus générales

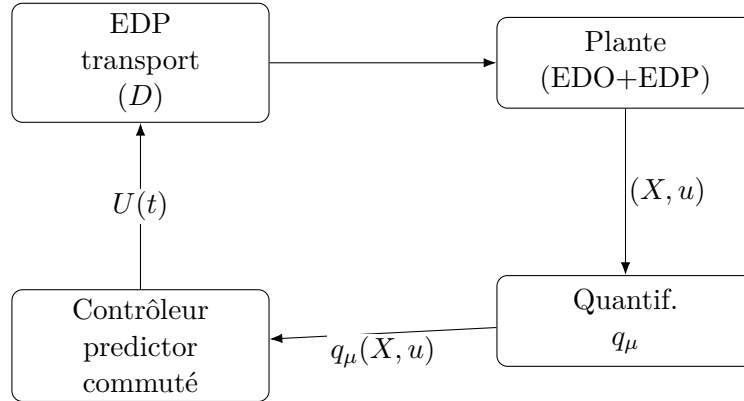
La preuve se décompose en briques *réutilisables* :

1. Une transformation de type backstepping (ou une réécriture) produisant un système cible ISS.
2. Une estimation ISS en norme sup pour l'EDP de transport (et des analogues pour d'autres EDP).
3. Un petit-gain sur l'erreur de quantification, rendu possible par un choix de μ .

C'est exactement ce qu'on exploitera ensuite pour un couplage plus riche EDO + EDP(s) de transport.

20 Mini-annexe : schémas et check-list de reproduction

20.1 Schéma de bloc (texte)



21 Code pour les simus

<https://github.com/Flo3221/quantizerp>

21.1 Check-list (si vous voulez appliquer à un autre système)

1. Identifier la dynamique de propagation (transport/délai) et l'espace d'état pertinent.
2. Proposer une loi nominale sans quantification (Lyapunov, prédicteur, backstepping, etc.).
3. Faire apparaître l'entrée $d(t)$ qui capture l'erreur de numérisation.
4. Démontrer : (i) existence d'un temps en lequel on capture convenablement (fin de Zoom, Phase 1), (ii) décroissance sur intervalles à μ fixé.
5. Concevoir Ω et T pour que *la réduction de norme soit plus rapide que la diminution de μ .*

Références

- [1] F. Koudohode and N. Bekiaris-Liberis, Simultaneous compensation of input delay and state/input quantization for linear systems via switched predictor feedback, *Systems & Control Letters*, 192 (2024), 105912. doi : 10.1016/j.sysconle.2024.105912.
- [2] I. Karafyllis and M. Krstic, *Input-to-State Stability for PDEs*, Springer, 2019.